

Prüfung im Fach Ökonometrie im SS 2010
Lösungsskizze

Aufgabe 1 (14 Punkte)

1.1 Was versteht man unter Heteroskedastie? (1 Punkt)

Unter Heteroskedastie versteht man eine Situation, in der die Varianz des Störterms im linearen Regressionsmodell nicht konstant ist, sondern über die Beobachtungen variiert.

1.2 Welche beiden ungünstigen Auswirkungen hat Heteroskedastie auf KQ Schätzergebnisse? (2 Punkte)

Die von KQ ausgewiesenen Standardfehler sind falsch. Die Schätzung ist ineffizient.

1.3 Nennen Sie zwei Verfahren, mit Heteroskedastie umzugehen. Welche der in 1.2 angesprochenen Probleme werden durch die beiden Verfahren jeweils gelöst, welche nicht? (4 Punkte)

Heteroskedastierobuste Standardfehler -> Die Standardfehler sind nicht mehr falsch, die Schätzung bleibt aber ineffizient. GLS Schätzung -> Die Standardfehler werden korrekt berechnet, die Schätzung ist effizient vorausgesetzt, die Störtermvarianz folgt tatsächlich der unterstellten Form.

1.4 Stellen Sie für das Modell $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i$ mit $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 x_{i1}$ die Varianz-Kovarianzmatrix der Störterme für 3 Beobachtungen mit $x_{i1} = (2; 3; 1)$ auf. Unterstellen Sie $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ mit $i \neq j$. (3 Punkte)

- 3×3 Matrix
- Hauptdiagonale: $\sigma^2 * 2; \sigma^2 * 3; \sigma^2 * 1$
- sonst Nullen

1.5 Transformieren Sie die Schätzgleichung aus 1.4 so, dass homoskedastische Störterme resultieren und zeigen Sie formal die gewünschte Auswirkung auf den Störterm. (4 Punkte)

Modell transformieren, indem alle Variablen mit $1/(x_{i1}^{0.5})$ multipliziert werden: Im transformierten Modell gilt, wenn x_{i1} und ε_i statistisch unabhängig:

$$Var\left(\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{x_{i1}}}\right) = \frac{1}{x_{i1}} Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$$

Alternativ (ohne Annahme statistischer Unabhängigkeit):

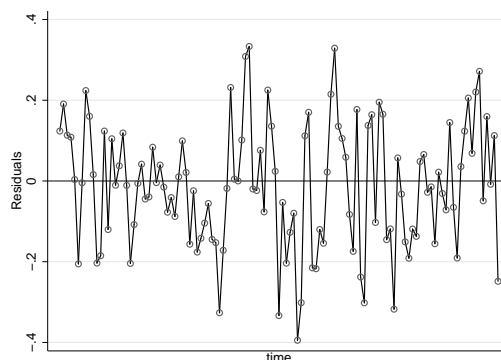
$$Var\left(\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{x_{i1}}} | \mathbf{x}\right) = \frac{1}{x_{i1}} Var(\varepsilon_i | \mathbf{x}) = \sigma^2$$

Varianz des transformierten Störterms ist homoskedastisch.

Aufgabe 2 (26 Punkte)

Der Zusammenhang zwischen Erträgen aus US-Schatzbriefen (Variable *trsury*) und Erträgen aus Unternehmensanleihen (Variable *bond*) wird mit Zeitreihendaten auf Monatsbasis für den Zeitraum 1950-1999 ($T = 600$ Beobachtungen) analysiert.

2.1 Die Abbildung zeigt den Plot der Residuen einer einfachen linearen Regression mit *bond* als abhängiger und *trsury* als unabhängiger Variable. Interpretieren Sie das Muster der Residuen. (2 Punkte)



- Zeitlich aufeinander folgende Residuen e_t und e_{t-1} nehmen häufig gemeinsam negative oder positive Werte an, sodass $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 0$ verletzt sein könnte.
- Der Plot deutet auf positive Autokorrelation hin.

2.2 Führen Sie unter Verwendung des folgenden Stata-Outputs einen Breusch-Godfrey-Test auf Autokorrelation 1. Ordnung durch. Geben Sie Null- und Alternativhypothese, Teststatistik, Freiheitsgrade, Schlusslogik und Testergebnis an. *Hinweis*: Die Variable *L1.e* im Stata Output bezeichnet das verzögerte Residuum e_{t-1} . (6 Punkte)

Source	SS	df	MS	Number of obs = 599		
Model	1.39901944	2	.699509721	F(2, 596)	=	25.92
Residual	16.0873719	596	.026992235	Prob > F	=	0.0000
Total	17.4863913	598	.029241457	R-squared	=	0.0800
				Adj R-squared	=	0.0769
				Root MSE	=	.16429

e	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
e						
L1.	.2898803	.0402649	7.20	0.000	.2108021	.3689586
trsury	-.0224507	.0144081	-1.56	0.120	-.0507475	.0058462
_cons	.0002455	.0067136	0.04	0.971	-.0129397	.0134308

- Hypothesen: $H_0: \rho = 0$ gegen $H_1: \rho \neq 0$
- Teststatistik: Mit R^2 aus der Hilfsregression für $t = 2, \dots, T$

$$e_t = \alpha + \rho e_{t-1} + \beta trsury_t + v_t$$

kann die Teststatistik wie folgt berechnet werden:

$$LM = (T - 1)R^2 \sim \chi_1^2,$$

wobei 1 Freiheitsgrad berücksichtigt wird.

- Entscheidungsregel: H_0 verwerfen, falls $LM > \chi_{1,0.05}^2 = 3.84$
- Berechnung: $599 \cdot 0.08 = 47.92$
- Entscheidung: H_0 verwerfen.

2.3 Erläutern Sie die Vorgehensweise bei der Schätzung des Modells mit dem iterativen Cochrane-Orcutt Verfahren. (7 Punkte)

- 1. Schritt: Schätzung des Modells mit autoregressiver Störgröße liefert (konsistente, aber ineffiziente) Parameterschätzer $\hat{\beta}$.
- 2. Schritt: Schätzung des Autokorrelationskoeffizienten ρ mit der Regression

$$e_t = \rho e_{t-1} + u_t,$$

wobei e die Residuen aus Schritt 1 sind ($e_t = y_t - \hat{\beta}' \mathbf{x}_t$).

- 3. Schritt: Für die Beobachtungen $t = 2, \dots, T$ müssen die Daten transformiert werden, wobei die erste Beobachtung für die Analyse nicht genutzt werden kann.

$$\underbrace{y_t - \hat{\rho} y_{t-1}}_{y^*} = \beta' \underbrace{(\mathbf{x}_t - \hat{\rho} \mathbf{x}_{t-1})}_{\mathbf{x}^*} + \underbrace{\varepsilon_t - \hat{\rho} \varepsilon_{t-1}}_{\varepsilon^*}$$

- 4. Schritt: Mit den Schätzern $\tilde{\beta}$ aus dem transformierten Modell werden neue Residuen \tilde{e} berechnet ($\tilde{e}_t = y_t - \tilde{\beta}' \mathbf{x}_t$).
- 5. Schritt: analog zu Schritt 2 wird mit der Regression

$$\tilde{e}_t = \rho \tilde{e}_{t-1} + u_t$$

der Autokorrelationskoeffizient erneut geschätzt.

- 6. Schritt: analog zu Schritt 3 wird das Modell mit dem neuen Schätzer für ρ aus Schritt 5 transformiert und geschätzt.
- Schritte 4, 5 und 6 werden wiederholt, bis ρ konvergiert.

2.4 Erläutern Sie die Teststatistik des Durbin-Watson-Tests. Welche Werte nimmt die Teststatistik bei stark positiver bzw. stark negativer Autokorrelation an. (3 Punkte)

Teststatistik:

$$dw \approx 2 - 2\hat{\rho}$$

wobei $\hat{\rho}$ den geschätzten Autokorrelationskoeffizienten aus der Regression

$$e_t = \rho e_{t-1} + u_t$$

bezeichnet.

- $\hat{\rho} = 1 \Leftrightarrow dw = 0$: stark positive Autokorrelation der Störgröße.

- $\hat{\rho} = -1 \Leftrightarrow dw = 4$: stark negative Autokorrelation der Störgröße

2.5 Diskutieren Sie allgemein die kritischen Werte und die möglichen Testentscheidungen beim Durbin-Watson-Test auf positive Autokorrelation. (3 Punkte)

- Es gibt keinen einzelnen allgemein gültigen kritischen Wert, da der kritische Wert des Tests von den Ausprägungen der exogenen Variablen abhängt.
- Aber: Es können untere und obere Grenzen, d_L bzw. d_U , für den kritischen Wert angegeben werden, die nur vom Stichprobenumfang T und der Anzahl der Variablen K abhängen.
- (a) $dw < d_L$: $H_0: \rho \leq 0$ ablehnen und $H_A: \rho > 0$ nicht verwerfen.
 (b) $dw > d_U$: $H_0: \rho \leq 0$ kann nicht verworfen werden.
 (c) $d_L < dw < d_U$: keine Aussage möglich.

2.6 Führen Sie den Durbin-Watson-Test auf positive Autokorrelation für das Cochrane-Orcutt transformierte Modell durch. Geben Sie Null- und Alternativhypothese, Teststatistik, Schlusslogik und Testergebnis an. (5 Punkte)

Cochrane-Orcutt AR(1) regression -- iterated estimates

Source	SS	df	MS			
Model	8.04298597	1	8.04298597	Number of obs =	599	
Residual	16.0931817	597	.026956753	F(1, 597) =	298.37	
Total	24.1361677	598	.040361484	Prob > F =	0.0000	
				R-squared =	0.3332	
				Adj R-squared =	0.3321	
				Root MSE =	.16419	

	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
bond						
trasury	.2523608	.0146099	17.27	0.000	.2236678	.2810538
_cons	.0066761	.0094307	0.71	0.479	-.0118454	.0251975
rho	.2886212					

Durbin-Watson statistic (original) 1.446887
 Durbin-Watson statistic (transformed) 1.896634

- Hypothesen:

$H_0: \rho \leq 0$ keine (positive) Autokorrelation
 $H_A: \rho > 0$ positive Autokorrelation

- Teststatistik: $dw = \frac{\sum_{t=2}^T (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T e_t^2} \approx 2 - 2\hat{\rho}$
- Mit $T > 200$ und $K = 1$ lautet die Entscheidungsregel: H_0 verwerfen, falls $dw < 1.76$; H_0 akzeptieren, falls $dw > 1.78$.
- Berechnung: Die DW-Teststatistik lautet $dw = 1.89$ (0.5 Punkte)
- Entscheidung: Da $1.89 > 1.78$ kann H_0 nicht verworfen werden. Im Cochrane-Orcutt transformierten Modell liegt wohl keine positive Autokorrelation vor.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Ein Datensatz mit 2751 Beobachtungen von erwerbstätigen Personen enthält folgende Informationen:

<i>ln_hwage</i>	logarithmierter Stundenlohn
<i>yeduc</i>	Jahre Ausbildung
<i>workexp</i>	Arbeitsmarkterfahrung in Jahren
<i>workexp2</i>	Arbeitsmarkterfahrung in Jahren (quadriert)
<i>female</i>	Geschlecht (weiblich= 1, sonst= 0)
<i>married</i>	Familienstand (verheiratet= 1, sonst= 0)
<i>east</i>	Wohnort (Ostdeutschland= 1, sonst= 0).

Eine KQ-Schätzung mit Stata liefert folgendes Ergebnis:

Source	SS	df	MS			
Model	191.721584	6	31.9535973	Number of obs =	2751	
Residual	320.202461	2744	.116691859	F(6, 2744) =	273.83	
Total	511.924045	2750	.186154198	Prob > F	= 0.0000	
				R-squared	= 0.3745	
				Adj R-squared	= 0.3731	
				Root MSE	= .3416	

ln_hwage	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
yedu	.0643291	.002619	24.56	0.000	.0591936	.0694645
workexp	.0270816	.0024086	11.24	0.000	.0223587	.0318046
workexp2	-.0004337	.0000567	-7.65	0.000	-.0005449	-.0003225
east	-.3640025	.0148568	-24.50	0.000	-.3931341	-.3348708
female	-.1599894	.0141118	-11.34	0.000	-.1876602	-.1323185
married	.0631277	.0150806	4.19	0.000	.0335572	.0926981
_cons	1.585621	.0405658	39.09	0.000	1.506078	1.665163

3.1 Bestimmen Sie die Lohnrendite auf Ausbildung und berechnen Sie die Rendite der Arbeitsmarkterfahrung am Durchschnitt der Variablenausprägung. *Hinweis:* Unterstellen Sie eine durchschnittliche Arbeitsmarkterfahrung von 18 Jahren. (3 Punkte)

- Ein weiteres Jahr Schul- und Berufsausbildung bringt ceteris paribus im Mittel eine Lohnrendite von circa 6.4%.
- Der marginale Effekt der Arbeitsmarkterfahrung hängt von der bereits bestehenden Arbeitsmarkterfahrung ab: $0.0271 - 2 \cdot 0.0004 \cdot workexp$. Bei 18 Jahren Arbeitsmarkterfahrung ergibt sich ceteris paribus eine durchschnittliche Lohnrendite von 1.27%.

3.2 Bestimmen und interpretieren Sie die auf Basis der Regression ermittelte exakte Differenz der Stundenlöhne zwischen Ost- und Westdeutschland. (2 Punkte)

- Die exakte Lohndifferenz beträgt ceteris paribus im Mittel 30.51% ($\exp(-0.364) - 1 = -0.3051$) zu ungunsten des Ostens. D. h., ceteris paribus ist der Stundenlohn in Ostdeutschland im Mittel 30.51% niedriger.

3.3 Überprüfen Sie die funktionale Form der Schätzgleichung, indem Sie einen RESET-Test durchführen. Geben Sie Null- und Alternativhypothese, Teststatistik, Freiheitsgrade, Schlusslogik und Testergebnis an. *Hinweis:* Im folgenden Output bezeichnen *yhat_sq* und *yhat_tr* Polynome 2. und 3. Grades für den vorhergesagten logarithmierten Stundenlohn. (5 Punkte)

Source	SS	df	MS	Number of obs = 2751		
Model	191.927131	8	23.9908913	F(8, 2742)	=	205.57
Residual	319.996914	2742	.116702011	Prob > F	=	0.0000
				R-squared	=	0.3749
				Adj R-squared	=	0.3731
Total	511.924045	2750	.186154198	Root MSE	=	.34162

ln_hwage	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
east	-.1797132	1.295849	-0.14	0.890	-2.720653	2.361226
yedu	.0298192	.2287445	0.13	0.896	-.4187097	.4783481
workexp	.0134707	.0961713	0.14	0.889	-.1751047	.2020462
workexp2	-.000218	.0015397	-0.14	0.887	-.0032372	.0028012
female	-.076565	.570544	-0.13	0.893	-1.195305	1.042175
married	.0304083	.2251805	0.14	0.893	-.4111323	.4719489
yhat_sq	.1007576	1.389548	0.07	0.942	-2.62391	2.825425
yhat_tr	-.0001206	.1796499	-0.00	0.999	-.3523835	.3521423
_cons	1.43757	2.642101	0.54	0.586	-3.74314	6.61828

- Hypothesen:
 $H_0: \alpha_2 = \alpha_3 = 0$
 H_1 : nicht H_0
wobei α_2 bzw. α_3 die Koeffizienten der Variablen $yhat_sq$ bzw. $yhat_tr$ bezeichnen.
- Teststatistik:

$$F = \frac{(S_0 - S_1)/J}{S_1/(N - (K + 1))} \sim F_{J, N - (K + 1)}$$

- Freiheitsgrade: $J = 2$ und $N - (K + 1) = 2742$
- Entscheidungsregel: H_0 verwerfen, falls $F > F_{J, N - (K + 1), 0.05} = F_{2, 2742, 0.05} = 3.00$
- Berechnung der Teststatistik:

$$F = \frac{(320.202 - 319.997)/2}{319.997/2742} = 0.8783$$

- Entscheidung: H_0 kann nicht verworfen werden. Es liegt wohl keine Fehlspezifikation vor.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

- 4.1 Leiten Sie ausgehend von der Formel $\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ für die KQ-Koeffizienten deren Varianz her. (6 Punkte)
- 4.2 Benötigen Sie hierfür alle Gauß-Markov Annahmen? Stellen Sie dabei insbesondere heraus für welche Rechenschritte Sie welche Annahmen benötigen. (4 Punkte)

1. Herleitung der Varianz:

- $Var\{b\} = Var\{(X'X)^{-1}X'y\} =$
- $= (X'X)^{-1}X'Var(\epsilon)X(X'X)^{-1} =$
- $= (X'X)^{-1}X'(\sigma^2 I_N)X(X'X)^{-1} =$
- $= \sigma^2 (X'X)^{-1}$

2. Man benötigt die A 2, 3 und 4.

Im Einzelnen:

Schritt (b): Um die $(X'X)^{-1}X'$ aus der Varianz ziehen zu können muss die A 2 (X und ε unabhängig) sowie die A 4 (die Cov der Störterme ist gleich Null) gelten.

Schritt (c): Um $Var(\varepsilon)$ durch $\sigma^2 I_N$ ersetzen zu können und dann im letzten Schritt σ^2 nach vorn ziehen zu können, muss die A 3 (konstantes σ^2) gelten.

Alternativ:

1. Herleitung der Varianz:

$$\begin{aligned}
 \text{(a) } Var\{b\} &= E\{(b - \beta)(b - \beta)'\} = \\
 &= E\{((X'X)^{-1}X' \overbrace{(X\beta + \varepsilon)}^y) - \beta)((X'X)^{-1}X' \overbrace{(X\beta + \varepsilon)}^y) - \beta)\} = \\
 \text{(b) } &= E\{(X'X)^{-1}X' \varepsilon \varepsilon' X (X'X)^{-1}\} = \\
 \text{(c) } &= (X'X)^{-1}X' E\{\varepsilon \varepsilon'\} X (X'X)^{-1} = \\
 \text{(d) } &= (X'X)^{-1}X' (\sigma^2 I_N) X (X'X)^{-1} = \\
 \text{(e) } &= \sigma^2 (X'X)^{-1}
 \end{aligned}$$

2. Man benötigt die A 2, 3 und 4.

Im Einzelnen:

Schritt (b): Um die $(X'X)^{-1}X'$ aus dem Erwartungswertoperator ziehen zu können muss die A 2 (X und ε unabhängig) sowie die A 4 (die Cov der Störterme ist gleich Null) gelten.

Schritt (c): Um $E\{\varepsilon \varepsilon'\}$ durch $\sigma^2 I_N$ ersetzen zu können und dann im letzten Schritt σ^2 nach vorn ziehen zu können, muss die A 3 (konstantes σ^2) gelten.

Aufgabe 5: Wahr-Falsch Fragen (30 Punkte)

Wahr oder falsch? Tragen Sie für jede der folgenden Aussagen ein „w“ für wahr oder ein „f“ für falsch ein. Für jede richtige Antwort gibt es 0,75 Punkte, für jede falsche Antwort werden 0,75 Punkte abgezogen. Die Gesamtpunktzahl kann nicht negativ werden.

Die Dichtefunktion der t-Verteilung hat ihr Minimum bei -1,96.	F
Das Auslassen einer relevanten Variable kann zu verzerrten und inkonsistenten KQ Schätzern führen.	W
Mithilfe eines linearen Regressionsmodells lassen sich Elastizitäten schätzen.	W
Wenn autokorrelierte Störterme vorliegen, ist der Feasible-GLS Schätzer BLUE.	F
Homoskedastische Störterme haben eine Varianz von 0.	F
Bei moving average Prozessen im Störterm sind alle Elemente der Varianz-Kovarianz Matrix des Störterms von Null verschieden.	F
Bei AR(1) Prozessen im Störterm sind alle Elemente der Varianz-Kovarianz Matrix des Störterms von Null verschieden.	W
Newey-West Standardfehler korrigieren für Heteroskedastie unbekanntem Ursprungs ebenso wie für Autokorrelation.	W
Asymptotische Eigenschaften eines Schätzers lassen sich mit Monte Carlo-Simulationen überprüfen.	W
Bei perfekter Multikollinearität bleibt die $X'X$ -Matrix invertierbar aber der KQ-Schätzer ist nicht eindeutig definiert.	F
Im einfachen Regressionsmodell ist die Vorhersage umso unpräziser, je größer die Entfernung zum Mittelwert des Regressors ist.	W
Ein RESET Test wird verwendet um auf Exogenität der Regressoren zu testen.	F

Heteroskedastische Störterme bilden die Schocks vergangener Perioden ab.	F
AR(1) Fehlerterme können auch heteroskedastisch sein.	W
Probit- und Logit-Modelle führen in der Regel zu sehr ähnlichen Schätzergebnissen für den marginalen Effekt erklärender Variablen.	W
Die Störterme im linearen Wahrscheinlichkeitsmodell sind immer heteroskedastisch.	W
Positive Autokorrelation kommt typischerweise in Querschnittsdaten vor.	F
Der ML-Schätzer bestimmt die Werte für die Bevölkerungsparameter so, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der beobachteten Stichprobe maximal wird.	W
Der Breusch-Pagan-Test kann als LM-test durchgeführt werden.	W
Der Durbin-Watson-Test gilt nur unter der Annahme strikt exogener Regressoren.	W
Die FGLS-Schätzung bei heteroskedastischen Störtermen beruht darauf, dass Beobachtungen mit kleiner Varianz im Störterm ein größeres Gewicht erhalten als Beobachtungen mit kleinerer Varianz im Störterm.	W
Bei Autokorrelation sind die mit den KQ-Schätzern ausgewiesenen p-Werte gültig.	F
Der kritische Wert der Durbin-Watson Teststatistik variiert mit den Ausprägungen der Regressoren im Modell.	W
Ein Spaltenvektor ergibt sich als die Quadratwurzel eines Zeilenvektors.	F
Symmetrische Matrizen sind auch quadratische Matrizen.	W
Jede symmetrische Matrix ist eine Diagonalmatrix.	F
Eine Gruppe von Vektoren ist linear abhängig, wenn einer der Vektoren als Lienarkombination der anderen beschrieben werden kann.	W
Eine Matrix ist invertierbar, wenn ihre Spalten linear abhängig sind.	F
Die Standardnormalverteilung hat einen Erwartungswert von Eins.	F
Die Likelihoodfunktion wird typischerweise in logarithmierter Form geschätzt.	W
Bei Vorliegen von Heteroskedastie gilt das Gauss-Markov-Theorem nicht.	W
Sind Polynome der erklärenden Variablen x im Modell enthalten, so ergibt sich der marginale Effekt der Variablen x als Ableitung von y nach x .	W
Je größer der Typ II Fehler eines Tests, umso größer muss der Typ I Fehler sein.	F
Bei positiver Autokorrelation 1. Ordnung ist die DW-Statistik negativ.	F
In ein Modell mit logarithmierter abhängiger Variable können keine Dummy-Variablen als erklärende Variablen eingefügt werden.	F
Wenn der p-Wert größer ist als das Signifikanzniveau eines Tests, wird die Nullhypothese nicht verworfen.	W
Der ML-Schätzer trifft keine Annahmen über die Verteilung der Störterme ϵ .	F
Der ML-Schätzer ist effizient.	W
Wald-, Likelihood-Ratio- und Lagrange-Multiplier-Tests sind asymptotisch äquivalent.	W
Eine starke Krümmung der Log-Likelihood-Funktion an der Stelle $\hat{\theta}$ führt zu einer unpräzisen Schätzung des Parameters θ .	F