Aufgabe 1:

Als wissenschaftlicher Mitarbeiter eines Schlafinstituts versuchen Sie schon seit längerem, geeignete Determinanten zu finden, die menschliches Schlafverhalten erklären können. Nach jahrelanger Forschung und vielen schlaflosen Nächten sind Sie auf folgende Gleichung gekommen:

$$SLEEP = \beta_1 + \beta_2 \cdot TOTWRK + \beta_3 \cdot EDUC + \beta_4 \cdot AGE + \beta_5 \cdot MARR$$

Um Ihre Gleichung schätzen zu können, nutzen Sie amerikanische Querschnittsdaten aus dem Jahre 1990 mit 532 Beobachtungen. Die Variablen sind wie folgt definiert:

$SLEEP_i$	**Schlaf pro Woche einer Person i, gemessen in Minuten**
$TOTWRK_i$	**Totale Arbeitszeit pro Woche der Person i , gemessen in Minuten**
$EDUC_i$	**Ausbildung der Person i , gemessen in Anzahl der Schuljahre**
AGE_i	**Alter der Person i, gemessen in Jahren**
$MARR_i$	**Dummy-Variable mit Ausprägung 1, wenn Person i verheiratet, sonst 0**
$MALE_i$	**Dummy-Variable mit Ausprägung 1, wenn Person i männlich, sonst 0**

Gesamthaft führen Sie drei Schätzungen durch. Die erste (Tabelle 1) beinhaltet sämtliche 532 Beobachtungen. Da Sie der Überzeugung sind, dass das Schlafverhalten zwischen Männern und Frauen jedoch grundsätzlich anders ist, schätzen Sie erneut nur für Männer (Tabelle 2) und danach nur für Frauen (Tabelle 3).

Tabelle 1:

Dependent Variable: SLEEP Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1 532: Included observations: 532 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3609.8	138.3	26.1012292	0
TOTWRK	-0.15	0.2	-0.75	0
EDUC	-10	7.2	-1.38888889	0.1651
AGE	1.5	1.6	0.9375	0.539
MARR	64.96	41.9	1.550358	0.0583

R-squared	0.113715	Mean dependent var	3259.466
Adjusted R-squared	0.10529	S.D. dependent var	430.9729
S.E. of regression	407.6534	Akaike info criterion	14.86993
Sum squared resid	87411354	Schwarz criterion	14.91816
Log likelihood	-3949.4	F-statistic	13.4977
Durbin-Watson stat	1.917767	Prob(F-statistic)	0

Tabelle 2:

Dependent Variable: SLEEP Method: Least Squares
Sample: 1 532 IF MALE=1: Included observations: 273

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3740.654	199.2318	18.77538	0
TOTWRK	-0.193726	0.029113	-6.654264	0
EDUC	-9.834978	9.557494	-1.029033	0.3043
AGE	1.396035	2.299914	0.606994	0.5443
MARR	56.52929	71.36427	0.792123	0.4289

R-squared	0.144577	Mean dependent var	3225.939
Adjusted R-squared	0.129675	S.D. dependent var	429.4095
S.E. of regression	400.6014	Akaike info criterion	14.84408
Sum squared resid	46058189	Schwarz criterion	14.91944
Log likelihood	-2168.657	F-statistic	9.70134
Durbin-Watson stat	1.800945	Prob(F-statistic)	0

Tabelle 3:

Dependent Variable: SLEEP Method: Least Squares
Sample: 1 532 IF MALE=0: Included observations: 259

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3579.708	203.2932	17.6086	0
TOTWRK	-0.119563	0.030968	-3.860808	0.0001
EDUC	-10.32447	10.98434	-0.939926	0.3482
AGE	0.200901	2.485346	0.080834	0.9356
MARR	70.98971	63.54732	1.117116	0.2651

R-squared	0.077318	Mean dependent var	3300.569
Adjusted R-squared	0.057518	S.D. dependent var	430.2185
S.E. of regression	417.6626	Akaike info criterion	14.93201
Sum squared resid	40645002	Schwarz criterion	15.01928
Log likelihood	-1778.375	F-statistic	3.904933
Durbin-Watson stat	1.950652	Prob(F-statistic)	0.002033

a) Interpretieren Sie den Regressionsparameter b_5 der Tabelle 1 statistisch und inhaltlich.

- statistisch: Koeffizient = 64.96; t – Statistik = 1.550358; p-Wert = 0.0583; auf 5%-Niveau insignifikant; auf 10% signifikant
- inhaltlich: Verheiratete Personen schlafen im Durchschnitt 65 Minuten oder gut eine Stunde länger in der Woche.

b) Testen Sie $H_0: \beta_2 - \beta_3 + \beta_4 = 10$ für Tabelle 1 auf dem 5%-Signifikanzniveau zweiseitig. Stellen Sie die Alternativhypothese auf. Sie wissen, dass $Cov(b_2, b_3) = 0$, $Cov(b_2, b_4) = 0$ und $Cov(b_3, b_4) = 0$. Geben Sie die korrekte Anzahl der Freiheitsgrade an, verwenden Sie jedoch $DF = \infty$.

- Anzahl Freiheitsgrade: 532 – 5 = 527.
- Wir testen: $\mathrm{H}_0: \beta_2 - \beta_3 + \beta_4 = 10$ gegen $\mathrm{H}_1: \beta_2 - \beta_3 + \beta_4 \neq 10$ mit: $t = \dfrac{(b_2 - b_3 + b_4) - (\beta_2 - \beta_3 + \beta_4)}{se(b_2 - b_3 + b_4)}$
- Es gilt: $(b_2 - b_3 + b_4) = (-0.15) - (-10) + (1.5) = 11.35$

  und

  $$se(b_2 - b_3 + b_4) = \sqrt{v\hat{a}r(b_2 - b_3 + b_4)},$$

  wobei

  $$v\hat{a}r(b_2 - b_3 + b_4) = v\hat{a}r(b_2) + v\hat{a}r(b_3) + v\hat{a}r(b_4) - 2cov(b_2, b_3) + 2cov(b_2, b_4) - 2cov(b_3, b_4)$$
  $$= 0.04 + 51.84 + 2.56 - 0 + 0 - 0 = 54.44$$

- Also: $t = \dfrac{11.35 - 10}{\sqrt{54.44}} = 0.183 \quad < \quad 1.96\ (= t_{0.025;\infty})$
- → Die Nullhypothese kann nicht verworfen werden.

c) Die berechnete Durbin-Watson Statistik hat den Wert 1.917767 (Tabelle 1). Testen Sie $H_0: \rho \geq 0$ auf dem 5% Signifikanzniveau und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise detailliert. Erläutern Sie die Alternativhypothese in Worten.

- Alternativhypothese: Es gibt negative Autokorrelation.
- $H_0: \rho \geq 0 \qquad (d \leq 2)$
  $H_1: \rho < 0 \qquad (d > 2)$

- Da $d^* = 1.917767$ kleiner ist als $4 - d_{Lc} = 4 - 1.728 = 2.272$ und $4 - d_{Uc} = 4 - 1.81 = 2.19$, kann die Nullhypothese (keine negative Autokorrelation) nicht verworfen werden.

d) Sie vermuten, dass Sie entscheidende Variablen ausgelassen haben. Deshalb schätzen Sie Ihr Modell erneut, diesmal zusätzlich mit den prognostizierten Werten der abhängigen Variablen in zweiter und dritter Potenz. Warum kann das nützlich sein? Die nun berechnete Fehlerquadratsumme ist 85774437. Welchen Schluss können Sie daraus ziehen? Erläutern Sie Ihr Vorgehen (verwenden Sie Tabelle 1).

- RESET-Test
- Wenn wir das Modell signifikant verbessern können, indem wir ein Polynom der vorhergesagten Werte berücksichtigen, dann muss das ursprüngliche Modell inadäquat gewesen sein. Sollte es nämlich ausgelassene Variablen geben, die mit den berücksichtigten Variablen mindestens geringfügig korreliert sind, so würde das über die Polynome der vorhergesagten Werte zum Teil aufgefangen und abgebildet.
- $F = \dfrac{\left(SSE_R - SSE_U\right)/J}{SSE_U/\left(T-K\right)} = \dfrac{\left(87411354 - 85774437\right)/2}{85774437/\left(532-7\right)} = 5.01 \qquad > 3.00$

e) Sie glauben weiter, dass der Einfluss der Arbeitsstunden auf das Schlafbedürfnis mit der Ausbildung des Arbeitnehmers variiert. Wie können Sie diese Hypothese testen?

- Neue Schätzung mit Interaktion von TOTWRK und EDUC
- Nullhypothese: Koeffizient = 0
- Testen anhand des t-Tests

f) Führen Sie einen Chow-Test bei einem Signifikanzniveau von 5% durch, um zu prüfen, ob es signifikante Unterschiede in den Regressionsergebnissen für Männer und Frauen gibt. Zu welchem Ergebnis kommen Sie? Wie sieht das unrestringierte Modell formal aus?

- Das unrestringierte Modell formal:

$$SLEEP = \beta_1 + \beta_2 \cdot MALE + \beta_3 \cdot TOTWRK + \beta_4 \cdot TOTWRK \cdot MALE + \beta_5 \cdot EDUC + \beta_6 \cdot EDUC \cdot MALE$$
$$+\beta_7 \cdot AGE + \beta_8 \cdot AGE \cdot MALE + \beta_9 \cdot MARR + \beta_{10} \cdot MARR \cdot MALE$$

- $SSE_m + SSE_f = 46058189 + 40645002 = 86703191 = SSE_U$
- $F = \dfrac{\left(SSE_R - SSE_U\right)/5}{SSE_U/\left(532-10\right)} = \dfrac{\left(87411354 - 86703191\right)/5}{86703191/522} = 0.85 \qquad < \; 2.21$
- Wir können also nicht davon ausgehen, dass die Koeffizienten nicht gleich Null sind.

g) Sie befürchten, dass die Variable *TOTWRK* mit dem Störterm korreliert. Was hätte das für Auswirkungen? Sie führen einen Hausman Test mit Hilfe von Instrument-Variablen durch. Erklären Sie genau Ihre Vorgehensweise. Welche Bedingungen müssen die Instrumente erfüllen?

- Auswirkungen: Problem der Inkonsistenz und keine Erwartungstreue. Auch bei steigender Stichprobengröße konvergiert der geschätzte Parameter nicht zum wahren Wert.
- Bedingung für IV: Die Instrument-Variablen sollten mit TOTWRK korrelieren, jedoch nicht mit dem Störterm.
- Hausman: Man regressiert die Variable, von der man den Zusammenhang mit *e* vermutet auf geeignete Variablen. Die Residuen integriert man als Vektor in die Ursprungsgleichung und testet den Koeffizienten mittels *t*-Test auf Signifikanz, wobei $H_0 : \gamma_{Residuen} = 0$.

Aufgabe 2:

In einem einfachen Regressionsmodell $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + e_t$ hat die Varianz des Störterms folgende Struktur: $\sigma_t^2 = \sigma^2 x_t^3$

a) Welche Auswirkungen hat dies auf die Eigenschaften des Kleinstquadrateschätzers?

- Der KQ-Schätzer ist nicht mehr BLUE, seine Varianz ist nicht mehr die kleinste aller linearen unverzerrten Schätzer (nicht mehr effizient).
- Die berechneten Standardfehler sind falsch, damit die Konfidenzintervalle und Teststatistiken für *t*-Tests.

b) Wie würden Sie vorgehen, um eine Schätzung mit homoskedastischen Fehlern zu erhalten? Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise und zeigen Sie, dass der in Ihrem Verfahren resultierende Störterm homoskedastisch ist.

- GLS-Schätzung:
- Schritt 1: Transformation der Daten mit Faktor $\frac{1}{x_t^{\sqrt{3}}}$
- Schritt 2: Schätzen von $\frac{y_t}{x_t^{\sqrt{3}}} = \beta_0 \frac{1}{x_t^{\sqrt{3}}} + \beta_1 \frac{x_t}{x_t^{\sqrt{3}}} + \frac{e_t}{x_t^{\sqrt{3}}}$

  $$y_t^* = \beta_0 x_0^* + \beta_1 x_t^* + e_t^*$$
- $var\left(e_t^*\right) = var\left(\frac{e_t}{x_t^{\sqrt{3}}}\right) = \frac{1}{x_t^3} \cdot var\left(e_t\right) = \sigma^2$

c) Gibt es ein alternatives Verfahren, das Problem anzugehen? Erläutern Sie dieses verbal und formal.

- White Korrektur:
- Bei der Berechnung der Standardfehler der geschätzten Parameter wird die geschätzte Varianz ersetzt durch $\sum \hat{e}_t^2$, so dass $var\left(b_1\right) = \frac{\sum\left(x_t - \bar{x}\right)\sigma_t^2}{\left(\sum\left(x_t - \bar{x}\right)^2\right)^2}$ geschätzt wird durch $\frac{\sum\left(x_t - \bar{x}\right)\hat{e}_t^2}{\left(\sum\left(x_t - \bar{x}\right)^2\right)^2}$.

d) Erläutern Sie detailliert, wie man am Beispiel der oben genannten Störtermvarianz formal auf Heteroskedastie testen kann.

- Goldfeld-Quandt Test:
- Schritt 1: Aufteilen (Halbieren) der Stichprobe auf Beobachtungen mit hohen und niedrigen Werten für x_t.
- Schritt 2: Separate Schätzungen ergeben zwei Werte für σ^2
- Schritt 3: Teststatistik $GQ = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}$, wobei der größere Wert im Zähler steht.
- $GQ \sim F_{T-(k+1);\,T-(k+1)}$, mit *k* = Anzahl der Steigungsparameter und *T* = Anzahl Beobachtungen

e) Wie lautet Ihr Schluss am 5 Prozent Signifikanzniveau für einen einseitigen Test der Homoskedastie als Nullhypothese, wenn die Teststatistik für den Test aus Aufgabe (d) den Wert 2,08 annimmt und Sie mit insgesamt 26 Beobachtungen gearbeitet haben?

– $F_{5\%\,;\,26-2\,;\,26-2} = 1.98$; Da $GQ = 2.08 > F$ wird H_0 verworfen; es liegt Heteroskedastie vor.

f) Sie erfahren nachträglich, dass die Varianz des Störterms die Form $\sigma_t^2 = \sigma^2 x_t^2$ annimmt. Was bedeutet dies für Ihre Schätzergebnisse aus Teilaufgabe (b)?

– Die Schätzung aus Teilaufgabe (b) führt immer noch zu Heteroskedastie, selbst nach Korrektur; die Korrektur wurde mit dem falschen Faktor ausgeführt.

– $var\left(e_t^*\right) = \frac{1}{x_t^3} \cdot \sigma^2 \cdot x_t^2 = \frac{\sigma^2}{x_t}$

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass folgender Zusammenhang zwischen der Teststatistik des F-Tests (F) und dem Gütemaß R^2 gilt:

$$F = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(T-k)},$$

wobei k die Anzahl der geschätzten Steigungsparameter und T die Anzahl der Beobachtungen angibt.

– $F = \frac{R^2/\left(k-1\right)}{\left(1-R^2\right)/\left(T-k\right)}$

– da $\mathrm{R}^2 = 1 - \frac{\mathrm{SSE}}{\mathrm{SST}}$

und $\mathrm{F} = \frac{\left(\mathrm{SST}-\mathrm{SSE}\right)/\left(\mathrm{k}-1\right)}{\mathrm{SSE}/\left(\mathrm{T}-\mathrm{k}\right)}$

ist zu zeigen, dass $\frac{\mathrm{R}^2}{1-\mathrm{R}^2} = \frac{\mathrm{SST}-\mathrm{SSE}}{\mathrm{SSE}}$

– Einsetzen ergibt $\frac{1-\frac{\mathrm{SSE}}{\mathrm{SST}}}{1-\left(1-\frac{\mathrm{SSE}}{\mathrm{SST}}\right)} = \frac{\frac{\mathrm{SST}-\mathrm{SSE}}{\mathrm{SST}}}{\frac{\mathrm{SSE}}{\mathrm{SST}}} = \frac{\mathrm{SST}-\mathrm{SSE}}{\mathrm{SSE}}$ q.e.d.

Aufgabe 4:

Wahr oder Falsch? Tragen Sie für zutreffende Aussagen den Buchstaben w (für wahr), für nicht zutreffende f (für falsch) ein. (Für jede richtige Antwort gibt es 0,75 Punkte, für jede falsche Antwort werden 0,75 Punkte abgezogen. Die Gesamtpunktzahl kann nicht negativ werden.)

W	Die Chi-Quadrat Verteilung ist eine einparametrige Verteilung.
W	Bei immer größer werdenden Stichproben tendiert die Varianz der mit dem Kleinstquadrateverfahren geschätzten Parameter gegen Null.
W	Das Auslassen relevanter erklärender Variablen führt in manchen, aber nicht in allen Fällen zu verzerrten Koeffizientenschätzungen für die berücksichtigten erklärenden Variablen.
F	Wenn die Standardfehler von Koeffizienten unterschätzt werden, sind die geschätzten Konfidenzintervalle der Koeffizienten zu breit.
F	Bei gegebener Typ I Fehlerwahrscheinlichkeit $\left(\alpha\right)$ ist die Wahrscheinlichkeit eines Typ II

	Fehlers positiv mit der Stichprobengröße korreliert.
F	Regressiert man eine logarithmierte abhängige Variable (ln(Y)) auf eine logarithmierte erklärende Variable (ln(X)), so gibt der Koeffizient an, um wie viel Prozent sich Y ändert, wenn X um eine Einheit steigt.
F	Das Gauss-Markov Theorem gilt nur für kleine Stichproben.
F	Der Kleinstquadrateschätzer ist umso unverzerrter, je größer die Stichprobe.
W	Heteroskedastie führt zu ineffizienten, aber unverzerrten Schätzergebnissen.
W	Im Rahmen des "Two stage least squares" Verfahren wird im zweiten Schritt die abhängige Variable auf den vorhergesagten Wert einer oder mehrerer erklärender Variablen regressiert.
W	Der Hausman Test vergleicht die Ergebnisse verschiedener Schätzverfahren.
F	Um nichtlineare Zusammenhänge zwischen erklärenden und abhängigen Variablen abzubilden, muss mehr als eine erklärende Variable im Modell sein.
F	Der Jarque-Bera Test prüft, ob eine Zufallsvariable standardnormalverteilt ist.
W	Der k-te Moment einer Zufallsvariable (Y) entspricht dem Erwartungswert von Y^k.
W	Der Durbin-Watson Test ist nicht geeignet, um auf Autokorrelation zu testen, wenn der Störterm von mehr als einem seiner verzögerten Werte bestimmt wird.
W	Es gibt Situationen in denen der Durbin-Watson Test nicht zu einem klaren Testergebnis führt.
F	Der Goldfeld-Quandt Test prüft genau wie der Chow Test, ob zwei Teilstichproben mit dem gleichen Modell geschätzt werden sollten.
W	Solange im Modell eine Konstante berücksichtigt ist, werden die Koeffizienten kategorischer erklärender Variablen hinsichtlich einer Referenzkategorie interpretiert.
F	Das angepasste R^2 sinkt, wenn die gleiche Erklärungsgüte mit weniger geschätzten Parametern erzielt werden kann.
W	Bei Messfehlern in den erklärenden Variablen ist der Kleinstquadrateschätzer inkonsistent.

Aufgabe 5:

Sind folgende Aussagen richtig? Erläutern Sie stichwortartig Ihre Auffassung (Bsp.: "Stimmt, weil..." bzw. "Stimmt nicht, weil..."). Nur bei korrekter Begründung wird die Antwort mit 1,5 Punkten pro Frage honoriert.

Stimmt	Durch die Berücksichtigung externer Informationen im Rahmen eines restricted least squares Schätzers kann sich die Qualität der Schätzung verschlechtern. → Genau dann, wenn die externe Information nicht exakt zutrifft, ist die Schätzung verzerrt.
Stimmt nicht	Der Lagrange Multiplier Test auf Autokorrelation ist nur bei Autokorrelation erster Ordnung anwendbar. → Der Vorteil des Tests ist eben die flexible Anwendbarkeit bei Autokorrelation höherer Ordnung. Es werden einfach zusätzlich verzögerte Störtermwerte in der Gleichung berücksichtigt: $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \rho e_{t-1} + \rho e_{t-2} + ... + \upsilon_t$
Stimmt nicht	Monte Carlo Simulationen nutzen vorliegende Datensätze, um zu überprüfen ob vorgegebene Beziehungen in den Daten gelten. → Bei Monte Carlo Simulationen werden die (Zufalls-)Daten generiert, die Datensätze liegen nicht vor.
Stimmt nicht	Die Varianz des Vorhersagefehlers bei Vorhersagen auf Basis eines linearen Modells hängt nicht von der Kovarianz zwischen geschätzter Regressionskonstante und Steigungsparameter ab.

	→ In die Varianz dieses Fehlers geht die Kovarianz mit ein, da beide Parameter in der Formel vorkommen, z.B. $var(f) = var\left(\beta_1 + \beta_2 x_0 + e_0 - \left(b_1 + b_2 x_0\right)\right)$
Stimmt	Der Hausman Test kann in der Form eines F-Tests durchgeführt werden. → Wenn mehrere erklärende Variablen gleichzeitig auf Endogenität getestet werden und vorhergesagte Residuen in der Schätzgleichung erscheinen.
Stimmt nicht	Darstellungen der Residuen erlauben Rückschlüsse auf mögliche Autokorrelation, aber nicht auf mögliche Heteroskedastie. → Durch geeignete Darstellung der Residuen in Hinblick auf die relevanten erklärenden Variablen kann Heteroskedastie sichtbar werden.
Stimmt nicht	Beim RESET Test wird der vorhergesagte Wert des Störterms als zusätzlicher Regressor im Modell verwendet. → Es wird der vorhergesagte Wert der abhängigen Variablen in 2. und höherer Potenz verwendet.
Stimmt	Die Auswirkungen von Autokorrelation und Heteroskedastie auf den Kleinstquadrateschätzer sind gleich. → In beiden Fällen wird KQ ineffizient und die geschätzten Standardfehler sind falsch.
Stimmt nicht	Die Nullhypothese $\rho \leq 0$ wird im Durbin-Watson Test verworfen, wenn die Durbin-Watson Teststatistik größer ist als 4 - d_L , wobei d_L den unteren kritischen Wert des Durbin-Watson Tests angibt. → Diese Nullhypothese wird verworfen, wenn die Teststatistik zwischen 0 und d_L liegt.
Stimmt nicht	Der Wert der geschätzten Koeffizienten ändert sich nicht, wenn alle Variablen des Modells (abhängige und unabhängige) durch einen Faktor 1'000 dividiert werden. → Die Konstante wird dann ebenfalls um den Faktor 1000 verkleinert.